MATEMATICA HAZARDULUI

Probabilități

MARTA CORDERO
MARIOLA GÓMEZ

Traducere de Ana-Maria Merticaru

LITERA
București

LIBRIS | We know books

SUMAR

Capitolul 0

Introducere

„Este admirabil că o știință născută din interesul pentru cazuri ce țin de noroc a devenit aspectul cel mai important al cunoașterii umane."

(Pierre-Simon Laplace, 1749-1827)

O călătorie lungă

Pentru găsirea originilor calculului probabilităţilor este necesară o întoarcere la zorii umanității. Descoperiri arheologice demonstrează că jocul de noroc exista deja acum mai bine de 5000 de ani. În timpul lungilor campanii militare, atât soldații romani, cât și cei greci se delectau jucând *astragali*, sau *noduri* (oase mici de la gleznă, cu șase fețe), și punând pariuri.

Din punctul de vedere al matematicii însă, nu se poate vorbi de calculul probabilităţilor în sine înainte de secolul al XVI-lea, când matematicienii italieni **Gerolamo Cardano** (1501-1576) și **Galileo Galilei** (1564-1642) au început să interpreteze rezultatele unor simple experimente aleatoare. Cardano, un împătimit al jocurilor de noroc, a folosit, în tratatul *De Ludo Aleae,* cuvântul *probabilitate* pentru a se referi la posibilitatea ca un anumit eveniment să se producă în joc. În tratatul ce poate fi considerat un fel de manual despre cum să pariezi în anumite jocuri de noroc ale epocii, se spune că toate fețele zarului vor ieși, în timp, de același număr de ori (echiprobabilitatea fețelor zarului). Mai târziu, Galileo a rezolvat următoarea problemă ce îi fusese pusă de un prieten: „Când se aruncă trei zaruri, există

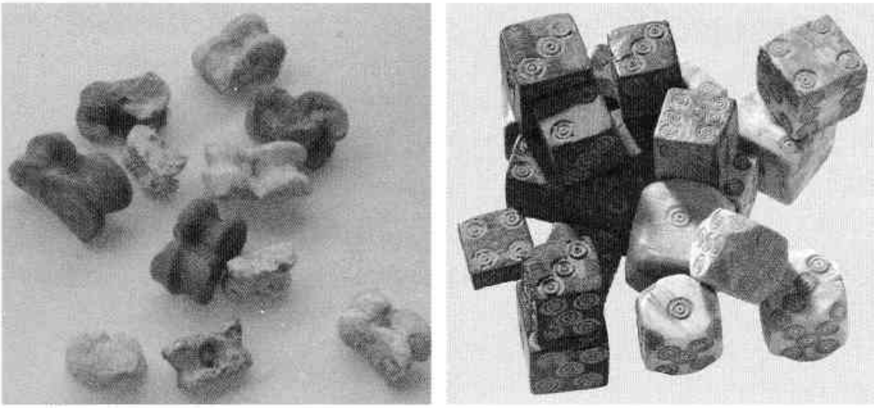

Figura 1. Astragali și zaruri din Roma antică.

șase combinații care permit obținerea sumei 9 și există alte șase care dau ca rezultat 10. Atunci, de ce se obține mai des 10 decât 9?" Galileo a observat că, deși este adevărat că există șase combinații de triplete a căror sumă este egală cu 9 ({1,2,6}, {1,3,5}, {1,4,4}, {2,2,5}, {2,3,4} și {3,3,3}) și alte șase a căror sumă este egală cu 10 ({1,3,6}, {1,4,5}, {2,2,6}, {2,3,5}, {2,4,4} și {3,3,4}), numărul de permutări (moduri în care este posibilă ordonarea numerelor) nu este același. În realitate, există 25 de permutări care au drept rezultate 9, în timp ce există 27 a căror sumă este egală cu 10; din acest motiv există o probabilitate puțin mai mare să iasă 10. Pentru moment, închidem aici acest discurs pe care îl vom relua mai târziu.

În 1654, **Blaise Pascal** (1623-1662), un om cu profunde convingeri religioase, a făcut o călătorie împreună cu prietenul său **Antoine Gombaud** (1607-1684), mai cunoscut drept Cavalerul de Méré. Antoine, mare pasionat de jocuri de noroc, câștigase o sumă considerabilă de bani pariind că aruncând de patru ori un zar ar obține 6 măcar o dată. Pentru a varia jocul și a face partidele mai interesante, s-a gândit: întrucât un zar poate să dea șase posibile rezultate și sunt necesare patru aruncări pentru a obține un șase, aruncând două zaruri rezultatele posibile ajung la 36 și, pentru a păstra aceeași proporție (4 din 6), trebuie aruncate zarurile de 24 de ori pentru a obține un șase-șase. Din păcate pentru el, acest raționament l-a făcut să piardă foarte mulți bani. Cavalerul de Méré l-a întrebat pe Pascal, în calitate de expert, care era opinia sa cu privire la calculul probabilităților în ambele jocuri. Pentru a examina în amănunt problema, Pascal a inițiat un schimb de epistole cu prietenul său, magistrat și mare pasionat de matematică, **Pierre de Fermat** (1601-1665). Profitând de disponibilitatea acestuia, Cavalerul de Méré i-a prezentat lui Pascal încă o problemă legată de distribuirea banilor de pe masă între diferiți jucători atunci când gărzile descoperă tripoul clandestin, iar participanții trebuie să o rupă la fugă înainte de a încheia partida. Mai exact, se presupune că sunt doi jucători, *A* și *B*, iar partida se termină atunci când unul din cei doi a câștigat cinci mâini. Într-un anumit punct, *A* a câștigat trei mâini, în timp ce *B* doar două. Sosesc gărzile și partida este întreruptă.

Odată ce sunt în siguranță, cum ar trebui împărțiți banii între cei doi jucători? Este clar că jucătorul *A* trebuie să primească mai mulți bani, dar în ce proporție? În schimbul de scrisori dintre Pascal și Fermat din vara și toamna lui 1654 se află răspunsurile la ambele probleme, cea cu zarurile și cea cu repartizarea potului.

Nu după mult timp, **Christiaan Huygens** (1629-1695), mai cunoscut pentru contribuțiile sale în fizică, a aflat despre calculele probabilităților făcute de Pascal și Fermat, manifestând interes pentru această temă. În cartea sa *Ratiociniis in Ludo Aleae*, un compendiu cu problemele ridicate până atunci și cu metodele folosite pentru rezolvarea lor, Huygens a adus în discuție alte cinci chestiuni care nu își vor găsi rezolvare până la apariția lui Jakob Bernoulli (1654-1705). În tratatul său, Huygens a stabilit că jocul de noroc corect este acela în care ambii jucători prevăd să obțină același câștig, ținând cont atât de probabilitatea de a câștiga și de a pierde, cât și de suma de bani pe care e posibil să o câștige sau să o piardă.

Cartea *Ars Conjectandi*, opera postumă a lui Jakob Bernoulli publicată de nepotul său **Nicolau Bernoulli** (1695-1726), are un rol fundamental în calculul probabilităților. Pe lângă rezolvarea multora dintre problemele ridicate anterior, Bernoulli a introdus ideea potrivit căreia este posibilă calcularea probabilității producerii unui eveniment, realizând de multe ori experimentul aleator potrivit și observând frecvența cu care se produce evenimentul în chestiune. În plus, extinde și punctul de vedere al calculului probabilităților și se interesează de problema inversă. Cu alte cuvinte, cum să deduci probabilitatea unui eveniment bazându-te pe consecințele acestuia (ex-post). Preotul prezbiterian **Thomas Bayes** (1702-1761) a continuat să studieze problema cauzelor prin intermediul efectelor observate, ceea ce îl va duce la crearea așa-zisei teoreme a lui Bayes sau a probabilității condiționate.

§

Teoria clasică a probabilității

Saltul calitativ în studiul probabilităților s-a produs în tratatele lui **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827). În timp ce predecesorii săi s-au dedicat, în substanță, studierii probabilităților în relație cu jocurile de noroc, acesta a început să lucreze la formalizarea matematică a teoriei probabilităților.

Laplace s-a născut în Normandia (Franța), într-o familie înstărită de proprietari de pământ. S-a remarcat foarte repede pentru calitățile sale extraordinare în matematică, grație cărora a obținut susținerea economică necesară ca să studieze la Universitatea din Caen. La 19 ani a obținut un post de profesor în cadrul Școlii Militare din Paris, unde l-a avut elev pe Napoleon Bonaparte. Mai târziu, a fost numit ministru de interne de către Napoleon, dar a ocupat această funcție doar șase săptămâni. Odată cu restaurarea monarhiei, Laplace a trecut de parte lui Ludovic al XVIII-lea, care i-a conferit titlul de marchiz. În 1812 a publicat *Théorie Analytique des Probabilités*, unde a expus definiția clasică a probabilității.

Probabilitatea producerii unui eveniment A este dată de raportul dintre numărul de experimente în care s-a produs acel eveniment și numărul total de experimente realizate în aceleași condiții, cu mențiunea că toate evenimentele posibile trebuie să fie echiprobabile.

În zilele noastre, definiția clasică a așa-numitei reguli a lui Laplace spune că „probabilitatea este raportul dintre numărul de evenimente favorabile și numărul de evenimente posibile, cu condiția ca acestea din urmă să fie toate echiprobabile",

$$P(A) = \frac{\text{numărul de cazuri favorabile lui } A}{\text{numărul de cazuri posibile}}.$$

Să vedem un exemplu simplu al modului de aplicare: lansând în aer două monede, evenimentele posibile echiprobabile (elementare) sunt ({cap, cap},{cap, pajură}, {pajură, cap}, {pajură, pajură}). Prin urmare, probabilitatea evenimentului A = {Obținerea unui singur cap} este

$$P(A) = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

Faptul că toate rezultatele posibile ale experimentului trebuie să fie echiprobabile între ele este un factor fundamental pentru definirea probabilității. Când cumpăr un bilet la loterie se pot produce două lucruri: pot câștiga premiul sau pot să nu câștig. În consecință, se poate crede că probabilitatea de câștig este egală cu ½, dat fiind că există un caz favorabil pe două cazuri posibile. Acesta este un exemplu extrem, dar foarte explicit, privind eroarea ce riscă să apară dacă nu se acordă atenție echiprobabilității efective a rezultatelor. De fapt, până și marele matematician francez **Jean le Rond d'Alembert** (1717-1783) a comis eroarea de a crede că, lansând două monede, probabilitatea de a obține cap este egală cu ⅔, din moment ce, a gândit el, evenimentele posibile sunt trei: {2 capete}, {1 cap} și {0 capete}; totuși, acesta nu a ținut cont de faptul că există două posibilități de a obține cap, adică {cap, pajură} și {pajură, cap}.

Ansamblul de evenimente elementare ale unui experiment aleator poartă numele de „spațiu de probă" și este cunoscut din start. Ceea ce nu se cunoaște, până în momentul realizării experimentului real, este ce evenimente anume se vor produce. Până nu lansăm monedele, de fapt, nu putem ști ce se va întâmpla, dar ştim ce poate urma. Având două evenimente, A și B, putem realiza diverse operațiuni. De exemplu, dacă aruncăm două zaruri și spunem că A = {Suma este pară} și B = {Suma este mai mică de 5}, evenimentele potențiale sunt următoarele:

- Eveniment complementar, $\overline{A}$

Negare: Nu – A = {suma nu este pară}

- Eveniment intersecție, $A \cap B$

Conjuncție: A și B = {suma este pară și mai mică decât cinci}

- Eveniment reuniune, $A \cup B$

Disjuncție: A sau B = {suma este pară sau este mai mică de cinci sau ambele situații}

Probabilitatea clasică permite deducerea cu ușurință a unei serii de proprietăți care sunt foarte utile în calculul probabilităților. Denumim N_T numărul total al evenimentelor elementare ale unui experiment aleator, $N_F(A)$ numărul de rezultate favorabile evenimentului A și $N_{NF}(A)$ toate celelalte rezultate (evenimente nefavorabile lui A).

1. Dându-se un eveniment oarecare, A, probabilitatea sa este non negativă,

$$P(A)=\frac{N_F(A)}{N_T}\geq 0 \Rightarrow P(A)\geq 0$$

Până la urmă, este vorba despre raportul dintre un număr mai mare sau egal cu zero, $N_F(A)$, și un număr pozitiv, N_T.

2. Dându-se un eveniment oarecare, A, probabilitatea sa este mai mică sau egală cu 1.

$$P(A)=\frac{N_F(A)}{N_T}\leq 1 \Rightarrow P(A)\leq 1$$

Din moment ce cazurile favorabile fac parte din cazurile posibile, prin urmare $N_F(A) \leq N_T$.

3. Dându-se un experiment, există rezultate care nu se pot produce. De exemplu, dacă aruncăm un zar cu șase fețe numerotate de la 1 la 6, este imposibil să iasă 7. În acest caz, se spune că evenimentul este imposibil și uneori este indicat cu simbolul $\varnothing$; probabilitatea sa este nulă.

$$P(\text{eveniment imposibil}) = 0$$
$$\text{prin urmare } N_F = 0$$

4. Dându-se un experiment, există cel puțin un eveniment care se va produce cu siguranță.
De exemplu, dacă aruncăm un zar cu șase fețe numerotate de la 1 la 6, suntem siguri că va ieși un număr mai mic de 7. În acest caz, se spune că este un eveniment cert și probabilitatea sa este egală cu 1.

$$P(\text{eveniment cert}) = 1$$
$$\text{prin urmare } N_F = N_T$$

5. Dându-se un eveniment oarecare, A, probabilitatea evenimentului complementar este

$$P(\overline{A}) = \frac{N_{NF}(A)}{N_T} = \frac{N_T - N_F(A)}{N_T} \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

6. Dându-se două evenimente oarecare, A și B, dacă sunt disjuncte (cu alte cuvinte, dacă nu au niciun element în comun și, prin urmare, intersecția mulțimii este vidă), atunci

$$P(A \cup \mathrm{B}) = \frac{N_F(A)+N_F(B)}{N_T} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

De exemplu, când aruncăm două zaruri, evenimentele A = {suma este mai mică de 5} și B {suma este mai mare de 7} sunt evenimente disjuncte.

7. Totuși, dându-se două evenimente, A și B, non disjuncte, adică există elemente care aparțin amândurora, atunci

$$P(A \cup B) = \frac{N_F(A)+N_F(B)-N_F(A\cap B)}{N_T} \Rightarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

De exemplu, atunci când aruncăm două zaruri, evenimentele A = {suma este mai mică de 5} și B = {suma este pară} sunt evenimente non disjuncte, dat fiind că evenimentele S_1 = {suma este 2} și S_2 = {suma este 4} sunt conținute atât în A, cât și în B.

Faptul că definiția clasică a probabilității, bazată pe un număr finit de cazuri posibile și echiprobabile, era insuficientă a fost clar încă din momentul formulării unei astfel de definiții. Din acest motiv, a fost naturală extinderea ei la infinitatea cazurilor posibile, menținând însă premisa „echiprobabilității". De exemplu, dacă avem două cercuri concentrice, C_1 și C_2, cu raza $r_1 > r_2$, și lansăm o săgeată la întâmplare (adică fără țintă precisă), probabilitatea ca aceasta să ajungă în interiorul lui C_2 este

$$P(\text{o săgeată înăuntrul lui } C_2) = \frac{\text{aria lui } C_2}{\text{aria lui } C_1}$$

unde s-a extins conceptul de „raport între numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor posibile", cu condiția ca punctul să fie ales la întâmplare.

§

Teoria frecventistă a probabilității

Cu toate că teoria clasică a probabilității ne permite să rezolvăm multe dintre problemele pe care ni le putem imagina, aceasta prezintă anumite limitări. Când lansăm o monedă, numărul de cazuri posibile este $N_T = 2$ ({cap}, {pajură}), când lansăm două monede, numărul de cazuri posibile este $N_T = 2^2 = 4$ ({cap, cap}, {cap, pajură}, {pajură, cap}, {pajură, pajură}); în general, dacă lansăm r monede, numărul de cazuri posibile este $N_T = 2^r$. Oricât de mare ar fi r, N_T va fi mereu un număr cunoscut pe care îl putem pune la numitor pentru a calcula orice probabilitate legată de experimentul ce constă în lansarea a r monede.

Să presupunem acum că experimentul constă în lansarea unei monede până iese cap prima dată și decidem să calculăm care este probabilitatea ca numărul total de lansări necesare să fie mai mare de 3. Aceasta înseamnă că numărul total de lansări ar putea fi 4 (cu rezultatul: pajură, pajură, pajură, cap), ar putea fi 5 (pajură, pajură, pajură, pajură, cap), 6 (pajură, pajură, pajură, pajură, pajură, cap) și așa mai departe, până la infinit. Are sens să vorbim despre numărul cazurilor posibile?